

SOLUCION NUMERICA DEL MODELO NO ADIABATICO DE ESTRELLAS  
PULSANTES MEDIANTE LA APLICACION DE UNA FORMULACION  
LAGRANGIANA

NUMERICAL SOLUTION OF THE NONADIABATIC MODEL OF PULSATING  
STARS THROUGH THE APPLICATION OF A LAGRANGIAN FORMULATION

A. Costa<sup>1</sup>, A. Sicardi Schifino<sup>2</sup> y C. Ferro Fontán<sup>2</sup>

1 IAFE (CONICET)

2 FCEN (UBA)

RESUMEN: La obtención de un lagrangiano termodinámico para el caso no adiabático mediante técnicas de la termodinámica irreversible, resuelve problemas numéricos hasta ahora existentes. La forma usual de trabajar consiste en obtener la solución no adiabática resolviendo numéricamente la ecuación de movimiento y usando como punto de partida el resultado del caso adiabático. Mediante este procedimiento la solución que mejor satisface las condiciones de contorno es elegida como el resultado correcto de la ecuación. El principio variacional asociado al lagrangiano termodinámico que mostramos permite identificar los modos no adiabáticos independientemente de la solución adiabática y ajustar automáticamente las condiciones de contorno.

ABSTRACT: The derivation of a thermodynamical Lagrangian for the non adiabatical case using the techniques of the

irreversible thermodynamic solves existing numerical problems. The usual method consists in obtaining the non adiabatic solution by solving numerically the equation of motion, using as initial solution that of the adiabatic case. The variational principle associated with the thermodynamical Lagrangian permits to identify the non adiabatical cases and to adjust the bounday conditions.

## INTRODUCCION Y ANTECEDENTES

Las teorías que explican el mecanismo de excitación de las estrellas pulsantes han sido ampliamente desarrolladas en base a diversas aproximaciones por distintos autores (Ledoux y Walraven, 1958; Cox, 1974).

Hoy en día, sin embargo, es posible utilizar un tratamiento más general y riguroso que permite reformular el problema usando las modernas técnicas de la termodinámica irreversible.

En función de este objetivo hemos encontrado una función de Lyapunov para el análisis de estabilidad en caso general. La interpretación termodinámica de esta función resulta ser la energía libre del sistema y de ella se obtienen en forma unificada y sistemática los principios variacionales existentes en la literatura del tema.

Hemos obtenido también un lagrangiano termodinámico para el caso disipativo general que permite hallar los autovalores y autovectores en forma sistemática (y con independencia del resultado adiabático) como resultado de la minimización de dicho lagrangiano.

## DESARROLLO

La obtención del principio variacional asociado al lagrangiano termodinámico para el caso más general resuelve problemas numéricos hasta ahora existentes. La forma usual de trabajar en los casos con disipación consiste en obtener la solución numérica de la ecuación de movimiento usando como punto de partida el resultado del caso adiabático. Mediante este procedimiento, la solución que mejor satisface las condiciones de contorno es elegida como el resultado buscado. Este criterio no ofrece garantías de que la solución hallada es la correcta.

La forma general de la ecuación de las oscilaciones puede escribirse en forma abreviada:

$$\mu \ddot{\xi} + \phi \dot{\xi} + L\xi + D \int \xi dt = 0 \quad (1)$$

$\xi$  es el desplazamiento y será un vector de una componente en el caso de oscilaciones radiales y un vector  $(\xi_r, \xi_\theta, \xi_\psi)$  de tres componentes para el caso no radial.  $\mu$ ,  $L$ ,  $\phi$  y  $D$  son los operadores diferenciales de cada caso particular (radial, no radial, adiabático y no adiabático). Cualquiera sea la expresión (1), estos operadores pueden ser reconocidos por la relación que guardan con la dependencia temporal de la perturbación  $\xi$ , es decir,  $\mu$  es el operador asociado a la inercia del sistema aplicado a  $\ddot{\xi}$ ,  $L$  asociado a los potenciales conservativos se aplica sobre  $\xi$ ,  $\phi$  es el operador de los esfuerzos viscosos (disipación positiva) y se aplica sobre  $\dot{\xi}$ ,  $D$  es un operador vinculado a las pérdidas radiativas, a la generación de energía termonuclear, energía de ionización, etc. y se aplica sobre  $\int \xi dt$ . Por ejemplo, en el caso adiabático estos operadores toman la conocida forma:

$$L = \frac{d}{dr} \left( r^4 \Gamma_1 p \frac{d}{dr} \xi \right) - r^3 \frac{d}{dr} \left[ (3\Gamma_1 - 4)p \right] \xi, \quad \mu = \rho \Gamma_4^4, \quad \phi = D = u \quad (2)$$

La construcción del lagrangiano termodinámico que hemos obtenido está basada en una idea original de Ongager y Machlup que fue formulada para situaciones cercanas al equilibrio termodinámico. A partir del balance entre flujos (velocidades de los procesos irreversibles, por ejemplo el flujo de calor) y fuerzas termodinámicas (causantes de los flujos, por ejemplo el gradiente de temperatura) se construye la expresión:

$$\mathcal{L} = \langle \mu \ddot{\xi} + \phi \dot{\xi} + L\xi + D \int \xi dt, \phi^{-1} (\mu \ddot{\xi} + \phi \dot{\xi} + L\xi + D \int \xi dt) \rangle, \quad (3)$$

que es una forma cuadrática mayor que cero para todos los casos de sustitución de  $\xi$  e igual a cero cuando  $\xi$  es la solución de la ecuación de movimiento. Puede interpretarse este lagrangiano como el "error" cometido por un proceso irreversible al elegir una solución  $\xi$  distinta de las que predice la ecuación de movimiento fenomenológica. Es decir, es una medida de las fluctuaciones del sistema.

Basados en la formulación presentada hemos desarrollado códigos computacionales que consisten en la búsqueda del mínimo del lagrangiano (3).

## APLICACION

Con el fin de ajustar los códigos computacionales correspondientes al método numérico al que nos hemos referido, hemos estudiado el siguiente caso sencillo con solución analítica en el límite adiabático que permite la comparación de resultados.

a) Modelo de densidad uniforme:

$$(\kappa^4 - \kappa^6) \frac{d^2 \xi}{d\kappa^2} + (4\kappa^3 - 6\kappa^5) \frac{d\xi}{d\kappa} + \zeta \kappa^4 \xi + \nu \xi + \alpha \delta(\kappa - \kappa_0) \xi = 0$$

$\zeta$  = frecuencia adimensional,  $\nu$  = viscosidad,  $\kappa_0$  = región de excitación

(ver tabla) El paso siguiente de este análisis será la aplicación de estos códigos a modelos más realistas para pulsaciones radiales para luego ajustar y aplicar estos códigos al caso no radial.

#### TABLA DE AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

AUTOVALORES		$x_0$	AUTOVECTORES
$w = \sigma t + ik$			
13.98	2E-5	0.9	(1,0), (-1.42, E-2), (E-3, -2E-2), (E-1, E-3)
13.99	1.5E-4	0.7	(1,0), (-1.39, 7E-2), (-2E-3, -3E-2), (-4E-3, 3E-2)
35.98	2.2E-5	0.9	(1,0), (-3.61, E-2), (2.83, -3E-2), (E-3, 3E-2)
35.99	4.8E-5	0.7	(1,0), (-3.6, 3E-2), (2.8, -0.1), (-6E-3, 9E-3)

#### SOLUCION ANALITICA ADIABATICA

0	0	...	(1,0), (0,0), (0,0), (0,0)
14	0	...	(1,0), (-1.4,0), (0,0), (0,0)
36	0	...	(1,0), (-3.6,0), (2.83,0), (0,0)
66	0	...	(1,0), (-6.6,0), (12.3,0), (-6.81,0)

$x_0$  ubicación de la región de inestabilidad.